

Συμβολισμοί / Εισαγωγικά:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ \& } A \subset A \text{ αληθής}$$

Α αριθμητικός $\omega\omega$ είναι είτε πεπερασμένο είτε $\exists f: \mathbb{N} \xrightarrow{\omega} A$

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Θετουμε $A = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : \exists \text{ υπακοιουθια } (a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ της } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } a_{k_n} \rightarrow x\}$

$$\text{τοτε } \limsup a_n = \sup A$$
$$\liminf a_n = \inf A$$

Ενας δειτερος τροπος να ορισω τα παραπάνω είναι:

$$\limsup a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\})$$

$$\liminf a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\})$$

$\forall (a_n)$ μια ακολουθια τοτε:

α) $\limsup a_n \leq x \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x + \varepsilon\}$ να είναι πεπερασμένο.

β) $\limsup a_n \geq x \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x - \varepsilon\}$ να είναι άπειρο.

γ) $\limsup a_n = x \Leftrightarrow$ Ισχύουν τα (α) & (β)

δ) $\liminf a_n \geq x \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ να είναι πεπερασμένο

ε) $\liminf a_n \leq x \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ να είναι άπειρο

στ) $\liminf a_n = x \Leftrightarrow$ Ισχύουν τα (δ) & (ε)

ζ) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

η) $a_n \rightarrow x \Leftrightarrow \limsup a_n = x = \liminf a_n$

Θέλουμε να αντιστοιχίσουμε ένα "μέγεθος" σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλ. να βρούμε μια συνάρτηση $g: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty)$ ώστε $g(I) = \text{μήκος του } I$, $\forall I \subset \mathbb{R}$.
 Δηλαδή, $g(I) = b-a$ αν $I = (a, b)$ ή $[a, b]$

Θέλω να είναι προσθετική συνάρτηση δηλ

για κάθε συστοιχία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ζώνη ανά δύο $\subset \mathbb{R}$

να ισχύει $g(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} g(A_n)$ και επίσης αν

$A \subset B \subset \mathbb{R}$ να συνεπίζεται $g(A) \leq g(B)$.

Γενικά δεν υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση, αλλά υπάρχει

δυνατότητα να γίνει προσθετική περιορίζοντας σε πλήθος τα εν λόγω σύνολα που θέλω να μετρήσω

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Ορισμός

Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X λέγεται αλγέβρα στο X , αν:

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$

iii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

Παρατηρήσεις

a) Αν $\mathcal{A}$ είναι μια αλγέβρα στο X τότε

i) αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (διότι έχουμε $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A}$)

ii) αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ τότε $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ (διότι έχουμε $\bigcup_{i=1}^n A_i = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i) \right) \in \mathcal{A}$)

b) Η (i) του ορισμού μπορεί να αντικατασταθεί με την πρόταση στ: $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ή $\emptyset \in \mathcal{A}$ (διότι παρατηρούμε ότι $\emptyset \in \mathcal{A}$ αφού $\emptyset = X \setminus X$ και από την άλλη μεριά $X \setminus \emptyset = X \in \mathcal{A}$)

Η (iii) του ορισμού μπορεί να αντικατασταθεί με την (ii) του (a)

Ορισμός: Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X , λέγεται σ -Αλγεβρα αν ισχύουν τα (i) και (ii) του ορισμού και επίσης αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, ναι τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ (Αντ. κλειστό ως προς τις αριθμήσιμες τομές)

Παρατηρήσεις:

i) Κάθε σ -Αλγεβρα είναι και Αλγεβρα.

Απόδ

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{με} \quad A_i = A_n \quad \text{για} \quad i \geq n.$$

ii) Κάθε σ -Αλγεβρα είναι κλειστή ως προς τις διαφορές και τις αριθμήσιμες ενώσεις.

iii) Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X είναι σ -Αλγεβρα αν $\emptyset \in \mathcal{A}$ είναι μη κενή και κλειστή ως προς τα συμπληρώματα και κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες τομές και τις αριθμήσιμες ενώσεις.

Παραδείγματα

1) Αν X τυχόν σύνολο τότε $\{\emptyset, X\}$ και $\mathcal{P}(X)$ είναι σ -αλγεβρες στο X και μάλιστα η 2^n είναι η μικρότερη ενώ η 2^X είναι η μεγαλύτερη.

2) Ας είναι $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{N} \setminus A \text{ πεπερασμένο}\}$. Η συλλογή $\mathcal{A}$ είναι αλγεβρα στο $\mathbb{N}$ (αλλά όχι σ -Αλγεβρα) διότι $\mathbb{N} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ κλειστή στα συμπληρώματα και θα αποδείξουμε ότι είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Ας είναι $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Αν για κάποιο $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ το A_{i_0} είναι πεπερασμένο τότε αφού $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset A_{i_0}$ το σύνολο $\bigcap_{i=1}^n A_i$ είναι πεπερασμένο, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Αν A_i είναι άπειρο για κάθε $i=1, \dots, n$ τότε (αφού $A_i \in \mathcal{A}$) $\mathbb{N} \setminus A_i$ είναι πεπερασμένο, $\forall i=1, \dots, n$. Άρα, $\bigcup_{i=1}^n (\mathbb{N} \setminus A_i)$ πεπερ. Δηλαδή, $\mathbb{N} \setminus \bigcap_{i=1}^n A_i$ πεπερ. Άρα, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Επίσης, $\mathcal{A}$ όχι σ -Αλγεβρα αφού
 $\{2n\} \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ενώ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{2n\} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{A}$

iii) Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια όλων των πεπερασμένων ενώσεων διασυντηρήσεων στο $\mathbb{R}$. Τότε $\mathcal{A}$ είναι αλγεβρα (αλλά όχι σ -αλγεβρα) αφού $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{A}$ κλειστή στα συμπληρώματα. Καταρχήν, αν δύο διασυντηρήματα τέμνονται τότε η ένωση τους είναι διασυντηρήματα. Άρα, κάθε στωικό της $\mathcal{A}$ μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένη ένωση ζευγών ανά δύο διασυντηρήσεων. Το συμπλήρωμά του είναι της ίδιας μορφής. Άρα, $\mathcal{A}$ κλειστή ως προς τα συμπληρώματα. Επίσης, $\mathcal{A}$ όχι σ -Αλγεβρα αφού παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει απείρως αριθμήσιμα σύνολα, ειδικότερα $\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$ ενώ $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$ με $\{n\} \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως, η $\mathcal{A}$ όχι κλειστή στις αριθμ. ενώσεις. Άρα, $\mathcal{A}$ όχι σ -αλγεβρα.

Ορισμός:

Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία συνόλων. Τότε $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται αυζουσα αν $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και λέγεται φθίνουσα αν $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση:

Έστω $\mathcal{A}$ αλγεβρα στο X . Αν τυχόν μια από τις 3 παρακάτω συνθήκες τότε η $\mathcal{A}$ είναι σ -αλγεβρα.

i) $(\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}})_{\text{αυζουσα}} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

ii) $(\forall (F_n)_{n \in \mathbb{N}})_{\text{φθίνουσα}} : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{A}$

iii) $(\forall (G_n)_{n \in \mathbb{N}})_{\text{φθίνουσα}} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \in \mathcal{A}$

Απόδειξη

ΙΔΕΑ Αποδεικνύει ρθo η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς αριθμ. πράξεις ή ενώσεις (αντιστοιχεί στο i & ii και iii)

i) Έστω $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία της $\mathcal{A}$

Θέτουμε $A_n := \bigcup_{i=1}^n B_i, \forall n=1,2,\dots$

$A_n \in \mathcal{A}$, (A_n) αυξανόμενη και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

ii) Έστω $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία της $\mathcal{A}$

Θέτουμε $A_n := \bigcap_{i=1}^n B_i, \forall n=1,2,\dots$

$A_n \in \mathcal{A}$, (A_n) φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

iii) Έστω $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία της $\mathcal{A}$

Θέτουμε $A_n := B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i, \forall n=1,2,\dots$

$A_n \in \mathcal{A}$, (A_n) ζεύγ. ανά δύο και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Πρόταση

Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X . Τότε, υπάρχει η ελάχιστη σ -άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X που περιέχει την $\mathcal{F}$.
Δηλαδή, αν $\mathcal{A}'$ σ -άλγεβρα στο X με $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$

Η $\mathcal{A}$ θα λέγεται "η σ -άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{F}$ " και θα συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{F})$

Απόδειξη (πρόταση)

Η τομή μιας μη κενής οικογένειας σ -αλγεβρών στο X είναι επίσης σ -άλγεβρα στο X

Αφού το $\mathcal{P}(X)$ είναι η σ -άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$.
Έτσι, η οικογένεια $\mathcal{A} = \{ \mathcal{A}' : \mathcal{A}' \text{ } \sigma\text{-άλγεβρα στο } X, \mathcal{F} \subset \mathcal{A}' \}$ είναι σ -άλγεβρα στο X , $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ και αν $\mathcal{A}'$ σ -άλγεβρα με $\mathcal{A}' \supset \mathcal{F}$ τότε $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, δηλ. η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη σ -άλγεβρα στο X που παράγει την $\mathcal{F}$

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{Y}$ η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του X (ή τοπολογία)

- i. Ένα $G \subset X$ λέγεται G_δ σύνολο αν υπάρχει (G_n) ακολουθία ανοιχτών υποσυνόλων του X ώστε $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$
 - ii. Ένα $F \subset X$ λέγεται F_σ σύνολο αν υπάρχει (F_n) ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$
 - iii. Ένα $B \subset X$ λέγεται σύνολο Borel αν $B \in \sigma(\mathcal{Y})$
- Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X)$ τη σ -αλγεβρά των Borel συνόλων του X (δηλ. $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{Y})$)

Παρατηρούμε ότι κάθε G_δ και F_σ σύνολο είναι σύνολο Borel.

Επίσης, κάθε κλειστό σύνολο είναι G_δ αφού

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \rho(x, F) \leq \frac{1}{n} \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{n}\right)$$
 ανοιχτό
 όπου $f: x \mapsto \rho(x, F)$ συνεχής
 Όμοια, κάθε ανοιχτό σύνολο είναι F_σ .

Πρόταση

Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

$\Delta_1 = \{ (-\infty, \beta] : \beta \in \mathbb{R} \}$, $\Delta_2 = \{ (a, \beta] : a, \beta \in \mathbb{R}, a < \beta \}$

$\Delta_3 = \{ (a, \beta) : a, \beta \in \mathbb{R}, a < \beta \}$ τότε

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3)$$

Απόδειξη

$$\text{υπό } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \underset{(\epsilon)}{\sigma(\Delta_3)} \subset \underset{(\delta)}{\sigma(\Delta_2)} \subset \underset{(\gamma)}{\sigma(\Delta_1)} \subset \underset{(\beta)}{\sigma(\mathcal{F})} \subset \underset{(\alpha)}{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

α) Αφού $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ προκύπτει $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(αφού $F \in \mathcal{F}$ και $X \setminus F \in \mathcal{Y} \subset \sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

β) $\Delta_1 \subset \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\Delta_1) \subset \sigma(\mathcal{F})$

γ) Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ ισχύει:

$$(a, \beta] = (-\infty, \beta] \setminus (-\infty, a] \in \sigma(\Delta_1)$$

$$\in \Delta_1 \subset \sigma(\Delta_1) \in \Delta_1 \subset \sigma(\Delta_1)$$

Έτσι, $\Delta_2 \subset \sigma(\Delta_1)$ και άρα $\sigma(\Delta_2) \subset \sigma(\Delta_1)$

δ) Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ ισχύει για το $n_0 \in \mathbb{N}$: $a < \beta - \frac{1}{n_0}$
 $(a, \beta) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (a, \beta - \frac{1}{n}]$ όπου $(a, \beta - \frac{1}{n}] \in \Delta_2 \subset \sigma(\Delta_2)$

Αρα, $(\alpha, \beta) \in \sigma(\Delta_2)$

Ευτεστούν, $\Delta_3 \subset \sigma(\Delta_2) \Rightarrow \sigma(\Delta_3) \subset \sigma(\Delta_2)$

ε) Αρκεί να δείξουμε $\gamma \in \sigma(\Delta_3) \Rightarrow \sigma(\gamma) \subset \sigma(\Delta_3)$

"
 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Γνωρίζουμε ότι κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως ορισμένη ένωση των ανοιχτών της Δ_3

Αρα, $\gamma \in \sigma(\Delta_3)$

Πρόταση

Έστω $k \geq 2$ και $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$

$$\Delta_1 = \left\{ \bigcap_{i=1}^k (-\infty, b_i] : b_i \in \mathbb{R}, \forall i=1, \dots, k \right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \bigcap_{i=1}^k (a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i=1, \dots, k \right\}$$

$$\Delta_3 = \left\{ \bigcap_{i=1}^k (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i=1, \dots, k \right\}$$

Τότε, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3)$

Ορισμός: Μια οικογένεια $\mathcal{D}$ υποσυνόλων του X , λέγεται κλάση Dynkin (στο X) αν

i) $X \in \mathcal{D}$

ii) Αν $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$

iii) Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ στο $\mathcal{D}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$

Παρατήρηση

1) Κάθε σ -άλγεβρα είναι κλάση Dynkin (οχι το αντίστροφο)

2) Όπως για τις σ -άλγεβρες αποδεικνύεται ότι αν

$\Delta \subset \mathcal{P}(X)$ τότε υπάρχει η ελάχιστη κλάση Dynkin $\mathcal{D}$ στο X που περιέχει τη Δ .

Η $\mathcal{D}$ θα λέγεται "ελάχιστη Dynkin που παράγεται από"

Τη Δ'' να συμβολίζεται με $\delta(\Delta)$
Ετσι, $\delta(\Delta) = \{ \lambda : \lambda \text{ υλίου Dynkin στο } X, \Delta \subset \lambda \}$
Επίσης κάθε σ -άλγεβρα είναι υλίου Dynkin, προκύπτει
 $\delta(\Delta) \subset \sigma(\Delta)$ για κάθε Δ .

Προσοχή: Αν η υλίου Dynkin είναι υλίου στις
πενερασμένες τομές ή ένωση τότε θα είναι σ -Άλγεβρα

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω Δ οικογένεια υποσυνόλων του X υλίου στις
πενερασμένες τομές. Τότε, $\sigma(\Delta) = \delta(\Delta)$